



UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



---

## MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MASTER**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Équations aux dérivées partielles et applications

Présenté par

**BEN SADEK Mebkhouta**

**Sujet**

---

---

**Principe variationnel d'Ekeland, quelques théories et applications sur un problème aux limites de second ordre**

---

---

Soutenu le : 27/06/2019

Devant le jury :

Mr. Abdelhak MOKHTARI

M.C.B. Univ de M'sila

Président

Mr. Dahmane BOUAFIA

M.C.B. Univ de M'sila

Rapporteur

Mr. Rabah MECHETER

M.A.A. Univ de M'sila

Examineur

**Promotion : 2018/2019**

---

# Remerciements

---

*Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à Dieu tout puissant pour la volonté, le courage et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années de formation.*

*Je tiens à remercier sincèrement **Mr : Dahmane BOUAFIA**, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour ses conseils.*

*Mes remerciements vont également aux membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail.*

*Aussi mes remerciements à tous les enseignants de département de ma thématique et spécialement, les enseignants de spécialité équations aux dérivées partielles et applications.*

*Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier ma soeur djamila et toute personne qui m'a aidé à réaliser ce travail.*

---

# Dédicace

---

*Je dédie ce modeste travail :*

*-A mes parents,*

*-A mes frères,*

*-A mes sœurs,*

*-A toute la famille ben sadek et la famille hamidi,*

*-A tous mes amis et toute ma famille de département*

*de Mathématiques et a toute la promotion 2018 /2019*

*de L'EDP.*

*-A toutes mes adorables que j'ai connu pendant*

*toute ma vie ...*

*Ben Sadek Mebkhouta*

---

# Table des matières

---

|  |           |
|--|-----------|
| Remerciements  | i         |
| Dédicace   | ii        |
| Notation   | v         |
| Introduction générale  | 1         |
| <b>I Quelques outils de base</b>                             | <b>4</b>  |
| I.1 Les opérateurs sur les espaces de Banach . . . . .       | 4         |
| I.1.1 Continuité des opérateurs . . . . .                    | 5         |
| I.1.2 Semi-continuité . . . . .                              | 6         |
| I.1.3 Opérateurs différentiables . . . . .                   | 7         |
| I.2 Théorie des points critiques . . . . .                   | 11        |
| I.2.1 Points et valeurs critiques . . . . .                  | 11        |
| I.2.2 Suite minimisante et infimum . . . . .                 | 12        |
| I.3 Espace de Lebesgue et Sobolev . . . . .                  | 13        |
| I.3.1 Les espace $L^p$ . . . . .                             | 13        |
| I.3.2 Lemme de compacité . . . . .                           | 14        |
| <b>II Principe variationnel d'Ekeland, quelques théories</b> | <b>15</b> |
| II.1 Principe variationnel d'Ekeland . . . . .               | 15        |
| II.2 Applications aux théorèmes de point fixe . . . . .      | 21        |
| II.2.1 Le théorème du point fixe de Caristi . . . . .        | 21        |
| II.2.2 Le théorème du point fixe de Banach . . . . .         | 22        |
| II.2.3 Théorème minimization de Takahashi . . . . .          | 24        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>III Existence de solutions pour un problème aux limites de second ordre sur la demi-droite par le principe variationnel d'Ekeland</b> | <b>26</b> |
| III.1 Introduction . . . . .   | 26        |
| III.2 préliminaires . . . . .  | 27        |
| III.3 Le résultat principal . . . . .  | 32        |
| <b>Conclusion</b>  | <b>38</b> |
| <b>Bibliographie</b>   | <b>39</b> |

---

# Notation

---

Nous introduisons les notations et les définitions nécessaires qui sont utilisées par la suite.

|                                  |  |
|----------------------------------|--|
| $\mathcal{H}$                    | Espace de Hilbert.   |
| $X'$                             | Dual topologique de $X$ .  |
| BVP                              | Problème aux limites de second ordre.  |
| $L^p(\Omega)$                    | $= \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} :  u ^p \in L^1(\Omega) \right\}$ avec $1 \leq p < \infty$ .                              |
| $\ u\ _{L^p}$                    | $= \left( \int_{\Omega}  u(x) ^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ .   |
| $L^\infty(\Omega)$               | $= \{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable et } \exists C :  u(x)  \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}$ .                                    |
| $\ u\ _{L^\infty}$               | $= \inf \{ C :  u(x)  \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}$ .   |
| $C(\Omega)$                      | Espace des fonctions continues sur $\Omega$ .  |
| $D(A)$                           | : Domaine de définition d'un opérateur borné $A$ .   |
| $R(A)$                           | : Image de $A$ qui est noté aussi par $ImA$ .  |
| $(X, d)$                         | : Espace métrique.   |
| $(., .)$                         | : Définit un produit scalaire.   |
| $\langle ., . \rangle$           | : Crochet du dualité.  |
| $\mathcal{L}(X, Y)$              | : Ensemble des applications linéaires continues.   |
| $\hookrightarrow$                | : On écrit $X \hookrightarrow Y$ pour signifier que $X$ est inclus dans $Y$<br>et que l'injection canonique de $X$ dans $Y$ est continue.                |
| $\hookrightarrow\hookrightarrow$ | : On écrit $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ pour signifier que $X$ est inclus dans $Y$<br>et que l'injection canonique de $X$ dans $Y$ est compacte. |
| p.p                              | Presque partout.   |
| $\partial_v F$                   | Dérivée directionnelle de $F$ dans la direction $v$ .  |
| $dF$                             | Dérivée au sens de Fréchet qui est noté aussi par $F'$ .   |
| $d_G F$                          | Dérivée au sens de Gâteaux.  |
| EVP                              | Principe variationnel d'Ekeland.   |
| CFPT                             | Théorème point fixe de Caristi.  |

s.c.i        Semi continue inférieur.

s.c.s        Semi continue supérieur.

f.s.c.i      Faiblement semi continue inférieur.

f.s.c.s      Faiblement semi continue supérieur.

$\mathcal{D}(J)$       Domaine de définition de  $J$ .

$C_l([0, +\infty), \mathbb{R}) = \{u \in C([0, +\infty), \mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) \text{ existe} \}$ .

---

# Introduction générale

---

Le principe variationnel d'Ekeland a été un résultat clé utilisé dans divers domaines d'analyse tels que l'analyse en point fixe, l'optimisation et la théorie du contrôle optimal. Dans ce travail on va donner quelques des applications du principe variationnel d'Ekeland au théorème de point fixe de Caristi, au théorème de point fixe de Banach et au théorème de minimisation de Takahashi fait l'objet.

En outre, dans ces contextes, je suis motivé pour explorer une version à valeurs multiples du principe et étudier son équivalence avec une version à valeurs multiples du théorème de point fixe de Caristi et du théorème de minimisation de Takahashi.

Depuis la naissance du calcul des variations, on s'est rendu compte que lorsqu'elles s'appliquent, les méthodes variationnelles peuvent obtenir des résultats qui peuvent parfois être plus efficaces que beaucoup d'autres méthodes. En outre, elles s'appliquent à un très grand nombre de situations. Il a été démontré, il y a plusieurs décennies, que les solutions de beaucoup de problèmes sont en fait des points critiques de certaines fonctionnelles.

Dans ce mémoire, on présente quelques-uns des travaux dans l'article [2] qui utilisent le principe variationnel d'Ekeland pour étudier des problèmes aux limites. Beaucoup de nouveaux résultats ont été obtenus récemment par des chercheurs, en utilisant cette approche et dans certains cas, des résultats semblables n'ont pas été obtenus par d'autres méthodes. Donc, on établit que la solution proposée d'un problème aux limites est un point critique d'une certaine fonctionnelle  $J$  sur un espace approprié, c'est-à-dire un point  $u$  dans l'espace où  $J'(u) = 0$ . Trouver les points où les dérivées s'annulent se ramène à la résolution du problème.

Cette mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous avons donné quelques outils de base qui sont utilisés par la suite.

Nous avons divisé le travail en trois sections. Dans la première section, nous avons abordé quelques caractéristiques d'opérateurs comme la continuité, la différentiabilité, les proprié-



tés de semi-continuité de fonctionnelles.

Nous avons présenté dans la deuxième section la théorie de point critique ainsi que la théorie de minimisation.

Dans la troisième section, nous avons donné un rappel sur l'espace  $L^p$  et présenté le lemme de compacité ( lemme de C. Corduneanu).

Dans le deuxième chapitre, notre objectif est montrer le principe variationnel d'Ekeland (forme forte) et quelques corollaires dérivées. Le (EVP) employée sur une fonctionnelle  $J$  et un espace métrique complet et autres conditions.

Le premier résultat dit que le presque minimiseur de la fonctionnelle  $J$  est aussi un presque point critique. Et on déduire de principe variationnel d'Ekeland plusieurs théorèmes de points fixes et les relations entre le (EVP) avec les autres théorèmes.

En fin, on va présenter le travail de l'article [2], qu' est intéressé à étudier l'existence de solutions pour le problèmes aux limites suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = \lambda q(x)f(x, u(x)), & x \in [0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Dans ce cas, nous avons trouvé que

le résultat dit que sous les conditions suivantes sur les fonctions  $f, p, q$  et les constantes suivantes :

( $H_0$ ) il existe des constantes  $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  et  $\theta \in (0, 1)$  tel que

$$|f(x, u)| \leq a|u|^\theta + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall u \in \mathbb{R},$$

( $H_1$ )  $p : [0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$  est continuellement différentiable et borné,

$q : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ , avec  $q \in L^1[0, +\infty) \cap L^\infty[0, +\infty)$ ,  $\frac{q}{p^\theta}, \frac{q}{p^2} \in L^1[0, +\infty)$ ,

$$M_0 = \int_0^{+\infty} q(x) \left( \int_x^{+\infty} \frac{ds}{p(s)} \right) dx < +\infty, \text{ et } M = \max(\|p\|_{L^2}, \|p'\|_{L^2}) < +\infty.$$

( $H_2$ )  $f(x, 0) = 0$ ,  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x, u)}{u} = +\infty$ , uniformément pour  $x \in [0, +\infty)$ .

Alors le problème (1) a au moins une solution  $u_\lambda$  pour chaque  $\lambda \in \left(0, \frac{1}{\|p\|_\infty M_0}\right)$  qui vérifie :

$$\int_0^{+\infty} \left( u'_\lambda(x) \varphi'(x) + u_\lambda(x) \varphi(x) \right) dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) f(x, u_\lambda(x)) \varphi(x) dx = 0,$$

pour tout  $\varphi \in H_0^1(0, +\infty)$ , c'est-à-dire,  $\langle J'(u_\lambda), \varphi \rangle = 0$  pour tout  $\varphi \in H_0^1(0, +\infty)$ . Ainsi  $u_\lambda$  est un point critique de la fonctionnelle  $J$ , qui est une solution faible (classique) de notre problème. Pour la démonstration, on a utilisé des lemmes nécessaires ainsi que le principe variationnel d'Ekeland.

# Quelques outils de base

Dans ce chapitre, on donne quelques notions élémentaires qui sont nécessaire par la suite.

## I.1 Les opérateurs sur les espaces de Banach

Soit  $X$  et  $Y$ , deux espaces de Banach.

**Définition I.1. (*Opérateur linéaire borné*)**[16] Soit  $A$  un opérateur linéaire, tel que  $D(A) = X$  et  $R(A) \subset Y$ . On dit que  $A$  est borné, s'il est borné sur la boule unité  $\bar{B}(0, 1)$ . C'est-à-dire, si l'ensemble

$$\{\|Ax\|, \|x\| \leq 1\}$$

est borné.

Conformément à cette définition, si  $A$  est borné, il existe une constante  $c > 0$  telle que, pour tout  $x$  avec  $\|x\| \leq 1$ , on a l'inégalité

$$\|Ax\| \leq c.$$

**Théorème I.1.** [16]  $A$  est borné, si et seulement si, il existe une constante  $c > 0$ , telle que

$$\|Ax\| \leq c\|x\|,$$

pour tout  $x \in X$ .

**Définition I.2. (*Espace dual*)**[15] L'ensemble des fonctionnelles linéaires continues définies sur un espace vectoriel normé constitue un espace vectoriel. On l'appelle dual de l'espace  $X$  et on note  $X'$ .

On munit  $X'$  de la norme

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|, \quad \forall f \in X'.$$

$X'$  muni de cette norme est un espace de Banach et on a l'inégalité

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_{X'} \|x\|_X, \quad \forall f \in X', \quad \forall x \in X.$$

**Définition I.3. (Convergence faible)** On dit qu'une suite  $(x_n) \in X$  converge faiblement vers  $x$ , si

$$\text{pour tout } f \in X', \quad \langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle,$$

et on écrit  $x_n \rightharpoonup x$ .

**Proposition I.1.** [6] Soit  $(x_n)$  une suite de  $X$ . On a

1. Si  $x_n \longrightarrow x$ , alors  $x_n \rightharpoonup x$ .
2. Si  $x_n \rightharpoonup x$ , alors  $(x_n)$  est bornée et  $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$ .

**Proposition I.2.** [6] Lorsque  $X$  est de dimension finie, une suite  $(x_n)$  converge faiblement, si et seulement si, elle converge fortement.

**Définition I.4. (Réflexivité)** Soit  $X$  un espace de Banach et soit  $\mathbf{i}$  l'injection canonique de  $X$  dans  $X''$ . On dit que  $X$  est réflexif, si  $\mathbf{i}(X) = X''$ , où  $X''$  est le bidual de  $X$ .

**Définition I.5. (Séparabilité)** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On dit que  $X$  est séparable si  $X$  admet une partie dénombrable et dense.

**Définition I.6.** On dit que l'espace  $X$  est faiblement compact si et seulement si compact pour la topologie faible.

**Théorème I.2.** [6] Un espace de Banach  $X$  est réflexif, si et seulement si sa boule fermée est faiblement compacte.

**Corollaire I.1.** [6] Si  $X$  est un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée  $(x_n) \subset X$  avec  $\|x_n\| \leq M$  contient une sous suite qui converge faiblement vers un élément  $x \in X$  vérifiant  $\|x\| \leq M$ .

### I.1.1 Continuité des opérateurs

On va considérer des opérateurs  $T$  de  $X$  dans  $Y$  et on va donner une définition concernant les propriétés de la continuité de  $T$ .

La notion plus simple est la suivante

**Définition I.7.** L'opérateur  $T : X \rightarrow Y$  est dit continu en  $x$ , si pour toute suite  $(x_n) \subset X$  qui converge vers  $x$ ,  $T(x_n)$  converge vers  $T(x)$  dans  $Y$ .

$T$  est dit continu sur  $\Omega \subset X$  si  $T$  est continu en tout point  $x \in \Omega$ .

**Définition I.8.** Un opérateur  $T : X \rightarrow Y$  est dit compact s'il est continu et a la propriété. Pour toute suite  $(x_n)$  bornée dans  $X$ , la suite  $(T(x_n))$  admet une sous suite convergente.

**Définition I.9.** Soit  $(X, \|\cdot\|_1)$  et  $(Y, \|\cdot\|_2)$  deux espaces de Banach. Un opérateur  $T : X \rightarrow Y$  est dit complètement continu s'il est continu et l'image de tout ensemble borné de  $X$  est compact dans  $Y$ .

### I.1.2 Semi-continuité

**Définition I.10.** 1. On dit qu'une fonctionnelle  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est semi-continue inférieurement (s.c.i.) au point  $x_0$ , si pour chaque suite  $(x_n) \subset \Omega$ , telle que  $x_n \rightarrow x_0$ , on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

2. On dit que  $f$  est semi-continue supérieurement (s.c.s.) au point  $x_0$ , si pour toute suite  $(x_n) \subset \Omega$ , telle que  $x_n \rightarrow x_0$ , on a

$$f(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

**Exemple I.1.** 1. Soit la fonctionnelle  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Alors  $f$  est semi-continue inférieurement (s.c.i.) à  $x_0 = 0$  mais n'est pas semi-continue supérieurement.

2. Soit la fonctionnelle  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Alors  $f$  est semi-continue supérieurement (s.c.s.) à  $x_0 = 0$  mais n'est pas semi-continue inférieurement.

**Définition I.11.** 1. Une fonctionnelle  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite faiblement semi-continue inférieurement (f.s.c.i.) au point  $x_0$ , si pour chaque suite  $(x_n) \subset \Omega$  telle que  $x_n \rightharpoonup x_0$ , on a

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

2. On dit que  $f$  est faiblement semi-continue supérieurement (f.s.c.s.) au point  $x_0$ , si pour toute suite  $(x_n) \subset \Omega$ , telle que  $x_n \rightharpoonup x_0$ , on a

$$f(x_0) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n).$$

**Exemple I.2.** Soit la fonctionnelle  $J$  définie sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  comme suit

$$J : u \rightarrow \|u\|^2,$$

alors  $J$  est faiblement semi-continue inférieure (f.s.c.i.). En effet, soit  $(u_n)$ , telle que  $u_n \rightharpoonup u$ , on montre que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2.$$

On a

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2 &= (u_n - u, u_n - u) \\ &= \|u_n\|^2 - 2(u_n, u) + \|u\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

et comme  $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$  et  $u_n \rightharpoonup u$ , donc

$$\forall u \in \mathcal{H} : (u_n, u) \rightarrow (u, u) = \|u\|^2.$$

Alors

$$\|u_n\|^2 \geq \|u\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

il résulte que

$$\|u\|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|u_n\|^2.$$

**Remarque I.1.** 1. Il est facile de voir que si  $f$  est continue en  $x_0$ , alors  $f$  est (s.c.s.) et (s.c.i.) et inversement.

2. Si  $f$  est faiblement continue en  $x_0$ , alors  $f$  est (f.s.c.s.) et (f.s.c.i.) et inversement.

### I.1.3 Opérateurs différentiables

Définitions et propriétés fondamentaux

**La dérivée au sens de Fréchet**

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach,  $U$  un ouvert de  $X$ .

**Définition I.12.** Soit  $u \in U$  et  $F : U \rightarrow Y$ . On dit que  $F$  est différentiable au point  $u$  s'il existe une application linéaire continue  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , telle que si on considère

$$R(h) = F(u + h) - F(u) - A.h, \text{ pour } h \in X, \text{ petit.}$$

Alors

$$\frac{R(h)}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \|h\| \rightarrow 0,$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que si } \|h\|_X \leq \delta, \text{ alors } \|R(h)\|_Y \leq \varepsilon \|h\|_X.$$

Si une telle application  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  existe, elle est forcément unique. On note par

$$A = dF(u).$$

Elle est appelée différentielle (au sens de Fréchet) de  $F$  en  $u$ , ou encore application linéaire tangente à  $F$  en  $u$ . En l'absence de précision supplémentaire différentiable signifiera dans la suite différentiable au sens de Fréchet.

**Exemple I.3.** 1. Si  $F(u) = c$ . Alors  $F$  Fréchet différentiable et

$$dF(u) = 0, \forall u.$$

2. Si  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$   $A(u + h) - A(u) = A.h$  et donc  $dA(u) = A, \forall u \in X$ .

3. Si  $X = H$  est un espace de Hilbert et  $F(u) = \|u\|^2 = \langle u, u \rangle$ , alors

$$dF(u)h = 2\langle u, h \rangle.$$

On a ensuite toutes les propriétés classiques.

**Proposition I.3.** [13]

i) Soit  $F$  et  $G$  deux applications de  $U$  vers  $Y$ . Si  $F$  et  $G$  sont différentiables en  $u \in U$ .

Alors  $\forall \lambda, \mu$  réels  $\lambda F + \mu G$  est différentiable en  $u$ , et

$$d(\lambda F + \mu G)(u) = \lambda dF(u) + \mu dG(u).$$

ii) Soit  $X, Y$  et  $Z$  trois espaces de Banach,  $U$  un ouvert de  $X$ , et  $V$  un ouvert de  $Y$ . Soit  $F : U \rightarrow Y$  et  $G : V \rightarrow Z$ , tels que  $F(U) \subset V$ . Si  $F$  est différentiable en  $u$  et  $G$  est différentiable en  $v = F(u)$ , alors  $G \circ F$  est différentiable en  $u$  et

$$d(G \circ F)(u) = dG(v) \circ dF(u), \quad v = F(u),$$

*c'est-à-dire*

$$d(G \circ F)(u)h = dG(v)[dF(u)h].$$

*La différentielle de  $G \circ F$  est donc la composition des applications linéaires continues  $dF(u)$  et  $dG(v)$ , pour  $v = F(u)$ .*

### Différentiabilité au sens de Gâteaux

Commençons par définir la notion de dérivée directionnelle.

**Définition I.13.** *Soit  $F : U \rightarrow Y$ ,  $u \in U$ . Soit  $v \in X$ ,  $v \neq 0$ . On appelle dérivée directionnelle en  $u$  de  $F$  dans la direction  $v$ , notée  $\partial_v F(u)$ , la limite lorsqu'elle existe.*

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t}.$$

*La notion de dérivée directionnelle est donc une extension de la notion de dérivée partielle. Si  $F$  est Fréchet différentiable, alors pour tout  $v \in X$  la dérivée directionnelle dans la direction  $v$  est donnée par*

$$\partial_v F(u) = dF(u)v.$$

*En effet,*

$$F(u + tv) = F(u) + dF(u)(tv) + R(tv).$$

*Donc*

$$\begin{aligned} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} &= dF(u)(v) + \frac{R(tv)}{t}, \\ \frac{R(tv)}{t} &\rightarrow 0, \text{ lorsque } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Définition I.14.** *On dit que  $F : U \rightarrow Y$  est Gâteaux différentiable en  $u$  ( $G$ -différentiable en  $u$ ), s'il existe une application linéaire continue  $A$  de  $X$  vers  $Y$ , c'est-à-dire  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , telle que pour tout  $v \in X$ , la dérivée directionnelle de  $F$  en  $u$  dans la direction  $v$  existe et est égale à  $A(v)$ , c'est-à-dire*

$$\partial_v F(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(u + tv) - F(u)}{t} = A(v), \quad t \rightarrow 0, \quad \forall v \in X.$$

*On vérifie alors que, si une telle application  $A$  existe, elle est unique. On note*

$$A = d_G F(u).$$



**Proposition I.4.** [13] *Si  $F$  est Fréchet différentiable en  $u$ , elle est Gâteaux différentiable en  $u$  et*

$$\partial_G F(u) = dF(u).$$

*La réciproque est fausse en général, même en dimension finie.*

**Exemple I.4.** Soit  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y}(x^2 + y^2), & \text{si } y \neq 0 \\ 0, & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

*La  $G$ -différentiabilité n'implique pas la continuité de  $F$  (alors que bien entendu la différentiabilité au sens de Fréchet l'implique).*

*En revanche, si on sait que  $F$  est  $C^1$  au sens de Gâteaux, alors  $F$  est Fréchet différentiable sur  $U$  et les deux notions coïncident et on a*

**Théorème I.3.** [13] *Soit  $F : U \rightarrow Y$  une application  $G$ -différentiable ( $U$  ouvert de  $X$ ). On suppose que l'application  $v \mapsto d_GF(v)$  est continue sur  $U$ . Alors  $F$  est Fréchet différentiable sur  $U$  et*

$$dF(v) = d_GF(v), \quad \forall v \in U.$$

**Démonstration.** Soit  $r \in (0, 1]$  tel que  $B_r(u) \subset U$ . Puisque  $d_GF : U \rightarrow X'$  est continu à  $u$ , pour chaque  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta \in (0, 1]$  tel que

$$\|d_GF(u + tv) - d_GF(u)\| < \varepsilon \quad \text{pour } \|v\| < \delta, |t| < 1. \quad (\text{I.1})$$

D'autre par, pour chaque  $v \in B_r(0)$  la fonction

$$t \in [0, 1] \mapsto (d_GF(u + tv), v),$$

est la dérivée de la fonction

$$g(t) = F(u + tv) \quad t \in [0, 1].$$

Par conséquent

$$\int_0^1 (d_GF(u + tv), v) dt = g(1) - g(0) = F(u + v) - F(u).$$

Donc

$$F(u + v) - F(u) - (d_GF(u), v) = \int_0^1 (d_GF(u + tv) - d_GF(u), v) dt. \quad (\text{I.2})$$

Soit

$$R(u, v) = \int_0^1 (d_GF(u + tv) - d_GF(u), v) dt.$$

D'après (I.1), pour tout  $v \in B_\delta(0)$ , nous avons que

$$\begin{aligned} \|R(u, v)\| &\leq \int_0^1 \|d_GF(u + tv) - d_GF(u)\| \|v\| dt \\ &\leq \varepsilon \|v\|. \end{aligned}$$

Pour cette raison  $R(u, v) = o(\|v\|)$  quand  $\|v\| \rightarrow 0$ . Ensuite, (I.2) montre que  $d_GF(u)$  est le dérivé de Fréchet de  $F$  à  $u$ . ■

**Remarque I.2.** *En pratique, il est plus facile de vérifier la différentiabilité au sens de Gâteaux. Si on veut prouver que  $F$  est  $C^1$ , il suffit donc de prouver qu'elle est Gâteaux différentiable, puis de vérifier que la différentiable  $d_GF$  est continue.*

## I.2 Théorie des points critiques

### I.2.1 Points et valeurs critiques

**Proposition I.5.** [13] *Soit  $X$  un espace de Banach, et  $J$  une application de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ , soit  $u \in X$ . On suppose que*

$$J(u) = \inf_{v \in X} J(v),$$

*c'est-à-dire*

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in X.$$

*Alors, si  $J$  est Gâteaux-différentiable en  $u$ , on a*

$$d_G J(u) = 0.$$

**Démonstration.** Sous l'hypothèse de ce proposition, supposons sans perte de généralité que  $u_0$  est un point minimum (sinon considérons la fonction  $-J$  au lieu de  $J$ ).

Comme  $u_0 \in U$  et  $U$  est ouvert, il existe un nombre réel positif  $r$  tel que la boule ouverte  $B_r(u_0)$  est contenu dans  $U$ .

Maintenant, soit  $h \in X \setminus \{0\}$ . Alors, pour chaque  $t$  tel que

$$|t| \leq \frac{r}{\|h\|}, \quad \text{on a,} \quad J(u_0 + th) \geq J(u_0),$$

et ainsi par le Gâteaux différentiabilité de  $J$  à  $u_0$ , nous avons

$$d_G J(u_0)(h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [J(u_0 + th) - J(u_0)] \geq 0.$$

Il s'ensuit également que  $d_G J(u_0)(-h) \geq 0$ , i.e.,  $d_G J(u_0)(h) \leq 0$ , par linéarité de  $d_G J(u_0)$ . Par conséquent  $d_G J(u_0)(h) = 0$ , pour tout  $h \in X$  en effet. Ainsi  $d_G J(u_0) = 0$ . ■

**Définition I.15.** Soit  $u_0 \in X$ . On dit que  $u_0$  est un minimum local pour  $J$  s'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$J(u_0) \leq J(v), \quad \forall v \in B(u_0, \delta).$$

On a alors

**Proposition I.6.** [13] Soit  $u_0 \in X$ , un minimum local de  $J$ . Alors si  $J$  est Gâteaux différentiable en  $u_0$ , alors

$$d_G J(u_0) = 0.$$

**Définition I.16.** Soit  $J$  une fonctionnelle différentiable de  $X$  vers  $\mathbb{R}$ . Un point  $u \in X$  est dit critique pour  $J$  ssi

$$dJ(u) = 0.$$

**Définition I.17.** On appelle valeur critique, de la fonctionnelle  $J$ , de classe  $C^1$  définie sur  $X$ , un nombre  $c \in \mathbb{R}$ , tel qu'il existe  $u \in X$ , tel que

$$J(u) = c, \quad dJ(u) = 0.$$

## I.2.2 Suite minimisante et infimum

**Définition I.18. (Suite minimisante)** Une suite minimisante d'une fonctionnelle  $J : X \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  est une suite  $(x_n)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(x_n) = \inf_{x \in X} J(x).$$

**Théorème I.4.** [13] Soit  $X$  un espace de Banach réflexif, et  $J$  une fonctionnelle définie sur  $X$ , telle que

1.  $J$  est (f.s.c.i),

2. la suite minimisante de  $J$  est bornée sur  $X$ ,  
alors  $J$  atteint son infimum sur  $X$ .

**Théorème I.5.** [15] Soit  $C$  un ensemble convexe fermé de  $X$ , Banach réflexif.

Soit  $J : C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . On suppose

i)  $J$  coercive et  $J \neq +\infty$ , c'est-à-dire

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty.$$

ii)  $J$  (s.c.i) pour la convergence faible. Alors il existe  $u \in C$ , tel que

$$J(u) = \inf_{v \in C} J(v) \quad (< +\infty).$$

Si de plus  $J$  est Gâteaux-différentiable en  $u$ , alors  $d_G J(u) = 0$ .

## I.3 Espace de Lebesgue et Sobolev

### I.3.1 Les espace $L^p$

Dans la suite,  $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  muni de la mesure de Lebesgue  $dx$  et on désigne par  $L^1(\Omega)$  l'espace de fonction intégrables sur  $\Omega$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ . On pose

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| dx, \quad \text{ou} \quad \|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f|.$$

**Théorème I.6. (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)** [6] Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $L^1$ . On suppose que

(a)  $(f_n(x)) \rightarrow f(x)$  p.p. Sur  $\Omega$ .

(b) Il existe une fonction  $g \in L^1(\Omega)$ , telle que pour chaque  $n$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$  p.p. Sur  $\Omega$ .

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Définition I.19.** Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p < \infty$ , on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

On note  $\|f\|_{L^p} = (\int_{\Omega} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ , et  $\|\cdot\|_{L^p}$  est une norme.

**Définition I.20.** *On pose*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \exists C : |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

*On note*

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C : |f(x)| \leq C, \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

**Théorème I.7.** [6] *L'espace  $L^p$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$ , et son dual est  $L^q$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .*

### I.3.2 Lemme de compacité

**Lemme I.1.** (C. Corduneanu)[1] *Soit  $D \subset C_l([0, +\infty), \mathbb{R})$  un ensemble borné. Alors  $D$  est relativement compact si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(a)  *$D$  est équicontinu sur tout sous-intervalle compact de  $\mathbb{R}^+$ , i.e.*

$$\forall J \subset [0, +\infty) \text{ compact}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in J :$$

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |u(x_1) - u(x_2)| \leq \varepsilon, \forall u \in D,$$

(b)  *$D$  est équiconvergent à  $+\infty$  i.e.,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T = T(\varepsilon) > 0 \text{ tel que}$$

$$\forall x : x \geq T(\varepsilon) \implies |u(x) - u(+\infty)| \leq \varepsilon, \forall u \in D.$$

# Principe variationnel d'Ekeland, quelques théories

---

Dans ce chapitre, on étudie le principe variationnel d'Ekeland et quelques résultats théoriques.

## II.1 Principe variationnel d'Ekeland

Soit  $X$  un espace métrique complet et  $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle semi-continu inférieur, bornée inférieurement. Si  $(u_n)_n$  est une suite minimisante, alors pour chaque  $\varepsilon > 0$  il existe  $n_0$  tel que pour  $n > n_0$

$$J(u_n) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

On dit que  $u = u_\varepsilon$  est un  $\varepsilon$ - minimiseur de  $J$  si

$$J(u) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

Le théorème d'Ekeland considère l'existence des points  $\varepsilon$ - minimiseur.

**Théorème II.1. (*principe variationnel d'Ekeland, forme forte 1974*)** ([10], [8])

*Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $J : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonctionnelle semi-continu inférieur, bornée inférieurement, et non identiquement égale à  $+\infty$  ( $J \not\equiv +\infty$ ).*

*Soit  $\varepsilon > 0$  et  $u = u_\varepsilon \in X$  qui donne tel que*

$$J(u) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

*Alors, pour tout  $\lambda > 0$  il existe  $v = v_\varepsilon \in X$  tel que*

- (a)  $J(v) \leq J(u)$ ,
- (b)  $d(u, v) \leq \lambda$ , et
- (c)  $J(v) < J(w) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(w, v)$ , pour tout  $w \in X \setminus \{v\}$ .

Pour preuve théorème II.1 nous avons besoin à le théorème suivant

**Théorème II.2. (*Intersection de Cantor*)**[3] Supposons que  $(X, d)$  soit un espace métrique complet, et  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de sous-ensembles imbriqués fermés non vides de  $X$ , tels que

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$$

Dont les diamètres tendent à zéro ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} A_n = 0$ ). Alors, l'ensemble  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  est constitué d'un unique point.

**Démonstration.** Pour simplifier, on dénote  $d_\lambda(u, v) := \frac{1}{\lambda}d(u, v)$  et définir une relation d'ordre partiel dans  $X$

$$u \prec v \Leftrightarrow J(u) \leq J(v) - \varepsilon d_\lambda(u, v).$$

On a

$$u \prec u \quad \forall u \in X$$

$$u \prec v, v \prec u \Rightarrow u = v, \quad \forall u, v \in X$$

$$u \prec v, v \prec w \Rightarrow u \prec w, \quad \forall u, v, w \in X.$$

Prouvons la transitivité. Supposons que pour  $u, v, w \in X$ ,  $u \prec v$  et  $v \prec w$ , ce qui signifie

$$u \prec v \Leftrightarrow J(u) \leq J(v) - \varepsilon d_\lambda(u, v),$$

et

$$v \prec w \Leftrightarrow J(v) \leq J(w) - \varepsilon d_\lambda(v, w).$$

Nous prouvons que

$$u \prec w \Leftrightarrow J(u) \leq J(w) - \varepsilon d_\lambda(u, w).$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} J(u) &\leq J(v) - \varepsilon d_\lambda(u, v) \\ &\leq J(w) - \varepsilon(d_\lambda(v, w) + d_\lambda(u, v)) \\ &\leq J(w) - \varepsilon d_\lambda(u, w). \end{aligned}$$

Maintenant définir une suite de sous-ensembles  $(S_n)_n$ . Soit  $u_1 = u$  et

$$S_1 := \{w \in X : w \prec u_1\}.$$

On construit inductivement une suite  $(u_n)_n$  comme suit :

$$\begin{aligned} u_2 &\in S_1 & J(u_2) &\leq \inf_{S_1} J + \frac{\varepsilon}{2^2} \\ S_2 &= \{w \in X : w \prec u_2\}, \dots \\ S_n &= \{w \in X : w \prec u_n\} \\ u_{n+1} &\in S_n & J(u_{n+1}) &\leq \inf_{S_n} J + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} S_1 &\supset S_2 \supset \dots \supset S_n \supset S_{n+1} \supset \dots \\ u_1 &\succ u_2 \succ \dots \succ u_n \succ u_{n+1} \succ \dots \end{aligned}$$

Chaque  $S_n$  est fermé. En effet, soit  $v_i \in S_n$  et  $\lim_{i \rightarrow \infty} v_i = v \in X$  ce qui signifie

$$J(v_i) \leq J(u_n) - \varepsilon d_\lambda(v_i, u_n).$$

Passant à la limite comme  $i \rightarrow \infty$ , par la semi-continuité inférieure de  $J$  et continuité de la distance  $d_\lambda$ , on a

$$J(v) \leq J(u_n) - \varepsilon d_\lambda(v, u_n).$$

Ce qui signifie que  $v \in S_n$ .

Ensuite, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} S_n = 0. \tag{II.1}$$

En effet, soit  $w \in S_n$

$$J(w) \leq J(u_n) - \varepsilon d_\lambda(w, u_n).$$

Par  $w \in S_n \subset S_{n-1}$

$$J(u_n) \leq \inf_{S_{n-1}} J + \frac{\varepsilon}{2^n} \leq J(w) + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

et

$$J(u_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} \leq J(w) \leq J(u_n) - \varepsilon d_\lambda(w, u_n).$$

Alors, ça donne la suite

$$d_\lambda(w, u_n) \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall w \in S_n.$$

Puis pour  $w_1$  et  $w_2 \in S_n$

$$d_\lambda(w_1, w_2) \leq d_\lambda(w_1, u_n) + d_\lambda(u_n, w_2) \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \forall w \in S_n,$$



ce qui prove (II.1).

D'après théorème d'intersection de Cantor ( théorème II.2), il existe unique  $v \in X$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{v\}.$$

Nous prouvons que  $v$  satisfait (a) – (c).

Puisque  $v \in S_1$  et  $v \prec u_1 = u$ . Ainsi, nous obtenons  $J(v) \leq J(u) - \varepsilon d_\lambda(v, u) \leq J(u)$ , lequel est (a).

Soit  $w \neq v$ . Si  $w \prec v$  on a  $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$  et alors  $w = v$ . Donc

$$J(w) > J(v) - \varepsilon d_\lambda(w, v),$$

ce prouve que (c).

Enfin, par  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = v$  et

$$d_\lambda(u, u_n) \leq \sum_{i=1}^{n-1} d_\lambda(u_i, u_{i+1}) \leq \sum_{i=1}^{n-1} 2^{-i} \leq 1,$$

il en résulte que  $d_\lambda(u, v) \leq 1$ , qui complète la preuve. ■

La constante  $\lambda$  en théorème II.1 le rend très flexible. Un choix fréquent est de prendre  $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$  et donc pour équilibrer les perturbations dans (b) et (c), nous obtenons la propriété suivante.

**Théorème II.3.** ([5], [4])

Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et soit  $J : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonctionnelle (s.c.i.), bornée inférieurement. Suppose que  $\varepsilon > 0$  et  $u_\varepsilon \in X$  satisfait

$$J(u_\varepsilon) \leq \inf_X J + \varepsilon.$$

Alors, il existe  $v \in X$  tel que

- (a)  $d(u_\varepsilon, v) \leq \sqrt{\varepsilon}$ ,
- (b)  $J(v) + \sqrt{\varepsilon} d(u_\varepsilon, v) \leq J(u_\varepsilon)$ , et
- (c)  $J(x) + \sqrt{\varepsilon} d(x, v) > J(v)$ , pour tout  $x \in X$ .

**Démonstration.** Posons  $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$  dans le théorème II.1.

■

**Théorème II.4. (*Principe variationnel d'Ekeland*)**[\[7\]](#) Soit  $J : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  une fonction propre semi-continue inférieurement bornée inférieurement. Pour chaque  $u \in \mathcal{D}(J)$  et chaque  $\varepsilon > 0$  fixé. Alors, il existe  $v \in X$  tel que

- (a)  $J(v) - J(u) + \varepsilon d(u, v) \leq 0$ ,
- (b)  $J(v) < J(x) + \varepsilon d(x, v)$ , pour tout  $x \in X \setminus \{v\}$ .

**Remarque II.1.** Principe variationnel d'Ekeland ([II.1](#)), équivalent au théorème [II.4](#), pour plus détail voir [\[7\]](#).

**Autres formes** Nous présentons quelques corollaires dérivés de principe d'Ekeland.

**Théorème II.5. (*Principe variationnel d'Ekeland, forme faible 1979*)**[\[8\]](#)

Soit  $(X, d)$  est un espace métrique complet et soit  $J : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonctionnelle qui est semi-continu inférieur, bornée inférieurement. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $u_\varepsilon \in X$  qui satisfait

$$J(u_\varepsilon) \leq \inf_X J + \varepsilon,$$

et chaque fois  $w \in X$  avec  $w \neq u_\varepsilon$ , alors

$$J(u_\varepsilon) < J(w) + \varepsilon d(u_\varepsilon, w).$$

**Démonstration.** Nous montrons que il existe  $u_\varepsilon$  un  $\varepsilon$ - minimiseur. Soit  $\varepsilon > 0$  et on mettet

$$\varepsilon_0 = \min\left\{\frac{1}{2}, \varepsilon^2\right\},$$

pour que  $0 < \varepsilon < 1$  on a  $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$ . Alors par la propriété de l'infimum

$$\exists u_0 \in X \text{ tel que } J(u_0) < \inf_X J + \varepsilon_0^2.$$

Alors  $u_0$  est un  $\varepsilon_0^2$ - minimiseur de  $J$ . Soit

$$\kappa_0 := \frac{1}{\varepsilon_0} > 1,$$

afin que on peut appliquer le théorème [II.1](#) pour obtenir l'existence de certains  $u_\varepsilon \in X$  tel que

$$J(u_\varepsilon) < J(w) + \varepsilon_0^2 \kappa_0 d(w, u_\varepsilon), \quad \forall w \neq u_\varepsilon.$$

Puisque  $\kappa_0 := \frac{1}{\varepsilon_0}$ , on a  $J(u_\varepsilon) < J(w) + \varepsilon_0 d(w, u_\varepsilon)$ ,  $\forall w \neq u_\varepsilon$ ,  
et comme,  $\varepsilon_0 < \varepsilon$ , donc on obtient

$$J(u_\varepsilon) < J(w) + \varepsilon d(w, u_\varepsilon), \quad \forall w \neq u_\varepsilon.$$

Aussi, de théorème II.1, on a que

$$J(u_\varepsilon) \leq J(u_0) < \inf_X J + \varepsilon_0^2 < \inf_X J + \varepsilon,$$

ce qui implique que  $u_\varepsilon$  est un  $\varepsilon$ - minimiseur de  $J$ .

■

**Corollaire II.1.** ([5], [17])

*Soit  $X$  est un espace de Banach  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle (s.c.i.), bornée inférieurement et Gâteaux différentiable. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  et toute  $u_\varepsilon \in X$  tel que*

$$J(u_\varepsilon) \leq \inf_X J + \varepsilon,$$

*il existe un point  $v$  dans  $X$  satisfaisant*

- (1)  $J(v) \leq J(u_\varepsilon)$ ,
- (2)  $\|v - u_\varepsilon\| \leq \sqrt{\varepsilon}$ , et
- (3)  $\|J'(v)\| \leq \sqrt{\varepsilon}$ .

**Démonstration.** Les relations (1) et (2) sont évidemment les (a) et (b) dans principe variationnel d'Ekeland pour  $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$ , tandis que pour (3), de la relation (c) on a, pour tout  $w \in X$  et tout  $t > 0$ ,

$$\frac{1}{t} [J(v) - J(v + tw)] \leq \sqrt{\varepsilon} \|w\|.$$

Passant à la limite comme  $t$  tend vers 0, nous obtenons cela pour chaque  $w$  dans  $X$

$$-\langle J'(v), w \rangle \leq \sqrt{\varepsilon} \|w\|.$$

Cela vaut aussi pour  $-w$ , alors

$$|\langle J'(v), w \rangle| \leq \sqrt{\varepsilon} \|w\|,$$

et alors

$$\|J'(v)\| \leq \sup_{\|w\|=1} |\langle J'(v), w \rangle| \leq \sqrt{\varepsilon}.$$

■

**Remarque II.2.** Les relations (1) et (3) signifie que nous avons obtenu un (presque minimiseur) de  $J$ , qui est aussi un (presque point critique).

**Corollaire II.2.** [17] Soit  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  est un  $C^1$ -fonctionnel qui est semi-continu inférieur et  $(u_n)$  est une suite minimisante. Alors, il existe une autre suite minimisante  $(v_n)$  tel que

- (1)  $J(v_n) \leq J(u_n)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - v_n\| = 0$ , et
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|J'(v_n)\| = 0$ .

**Démonstration.**  $J$  bornée inférieurement implique que  $\inf_X J = c \in \mathbb{R}$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = c$  implique par propriété d'infimum et définition de limites que, il existe  $n_0$  tel que,

$$J(u_n) \leq \inf_X J + \frac{1}{n^2}, \quad \text{pour tout } n > n_0.$$

Alors par théorème II.1, il existe une suite  $(v_n)$  tel que

- (3)  $J(v_n) \leq J(u_n)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$
- (4)  $\|u_n - v_n\| \leq \frac{1}{n}$ , et
- (5)  $\|J'(v_n)\| \leq \frac{1}{n}$ .

En prenant la limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  dans les deux cotés de (4) et (5), on obtient le résultat.

■

## II.2 Applications aux théorèmes de point fixe

En 1972, Ekeland a obtenu son fameux principe variationnel qui a conduit à de nombreuses applications notamment dans la théorie des points critiques. Maintenant, nous utilisons le principe variationnel d'Ekeland pour déduire plusieurs théorèmes de points fixes.

On dit que  $x$  est un point fixe de  $f$  si  $f(x) = x$ .

### II.2.1 Le théorème du point fixe de Caristi

**Théorème II.6. (Caristi)**[3] Soit  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonctionnelle semi-continue inférieurement bornée inférieurement. Soit  $f : X \rightarrow X$  une fonction quelconque telle que

$$d(x, f(x)) \leq J(x) - J(f(x)), \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Alors  $f$  a un point fixe.

Maintenant, voici une démonstration du théorème de Caristi grâce à principe variationnel d'Ekeland.

**Démonstration.** D'après théorème II.6, supposons au contraire que  $v \neq f(v)$ ,  $\forall v$ , on choisissons  $u \in X$  tel que

$$J(u) \leq \inf_{x \in X} J(x) + 1.$$

Par le théorème II.4 il existe  $v \in X$ , pour tout  $x \in X$  et par l'hypothèse de théorème de Caristi on a

$$\begin{cases} d(x, v) & > J(v) - J(x), \quad x \neq v, \\ d(v, f(v)) & \leq J(v) - J(f(v)). \end{cases}$$

Comme  $x \neq v$ , on pose  $x = f(v)$  on obtient

$$\begin{cases} d(f(v), v) & > J(v) - J(f(v)), \\ d(v, f(v)) & \leq J(v) - J(f(v)). \end{cases}$$

Contradiction, on en déduit que  $f(v) = v$  est un point fixe.

■

### II.2.2 Le théorème du point fixe de Banach

**Définition II.1.** Une fonction  $f : X_1 \rightarrow X_2$  où  $(X_1, d_1)$  et  $(X_2, d_2)$  sont des espaces métriques,  $f$  est dite Lipschitzienne s'il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que

$$d_2(f(x), f(y)) \leq k d_1(x, y),$$

pour tout  $x, y \in X_1$ . La plus petite valeur  $k$  satisfaisant cette propriété pour la fonction  $f$  est appelée la constante de Lipschitz.

Si cette constante  $k$  est plus petite que 1, la fonction  $f$  est appelée une contraction avec constante de contraction  $k$ .

Le théorème de point fixe le plus élémentaire et certainement le plus utilisé est le principe de contraction de Banach.

**Théorème II.7. (*Principe de contraction de Banach*)**[3] Soit  $f : X \rightarrow X$  une contraction. Alors,  $f$  a un unique point fixe.

**Remarque II.3.** *La preuve est bien connue. Elle établit que toute suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  définie inductivement par  $x_{n+1} = f(x_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  converge vers  $z = f(z)$ . En ce qui concerne l'unicité du point fixe, remarquons que toute contraction a au plus un point fixe. En effet, nous obtenons la contradiction suivante en supposant l'existence de deux points fixes distincts  $z_1$  et  $z_2$  pour une contraction  $f$  :*

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= d(f(z_1), f(z_2)) \\ &\leq kd(z_1, z_2) \\ &< d(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Le théorème de Banach découle du théorème de Caristi. En voici la démonstration.

**Démonstration.** D'après théorème II.7, nous avons que

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \tag{II.2}$$

pour un  $k \in [0, 1)$ . On pose :  $y = f(x)$  dans (II.2), on obtient

$$\begin{aligned} d(f(x), f^2(x)) &\leq kd(x, f(x)) \\ \Rightarrow d(f(x), f^2(x)) - d(x, f(x)) &\leq (k - 1)d(x, f(x)) \\ \Rightarrow (1 - k)d(x, f(x)) &\leq d(x, f(x)) - d(f(x), f^2(x)) \\ \Rightarrow d(x, f(x)) &\leq \frac{1}{1-k}d(x, f(x)) - \frac{1}{1-k}d(f(x), f^2(x)). \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Caristi avec la fonctionnelle  $J(x) = \frac{1}{1-k}d(x, f(x))$  on déduit que  $f$  a un point fixe. ■

Le théorème de Banach découle du théorème de principe variationnel d'Ekeland (EVP). En voici la démonstration.

**Démonstration.** On suppose au contraire qu'il n'existe pas un point fixe on définit la fonctionnelle  $J$  par

$$J(x) := d(x, f(x)), \quad \text{pour tout } x \in X.$$

On applique le théorème II.4 sur  $J$  avec  $\varepsilon \in (0, 1 - k)$ , on a  $y \in X$  telle que

$$J(x) + \varepsilon d(x, y) \geq J(y), \quad \text{pour tout } x \in X \setminus \{y\}. \tag{II.3}$$

En particulier, on pose  $x = f(y)$  dans (II.3), donc, on a

$$\begin{aligned} J(y) &\leq J(f(y)) + \varepsilon d(f(y), y) \\ \Leftrightarrow d(y, f(y)) &\leq d(f(y), f^2(y)) + \varepsilon d(y, f(y)) \\ \Leftrightarrow d(y, f(y)) &\leq (k + \varepsilon) d(y, f(y)). \end{aligned}$$

Ce qui est impossible à tenir avec  $d(y, f(y)) > 0$  puisque  $k + \varepsilon < 1$ .

Donc  $d(y, f(y)) = 0$ , c'est-à-dire  $f(y) = y$ . Ainsi,  $y$  doit être un point fixe.

■

### II.2.3 Théorème minimization de Takahashi

Le théorème de Takahashi découle du théorème de principe variationnel d'Ekeland (EVP).

**Théorème II.8. (Théorème minimization de Takahashi)**[7] Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $J : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonctionnelle propre, semi-continue inférieur, et bornée inférieurement. Supposons que, pour chaque  $x_0 \in X$  avec  $\inf_{x \in X} J(x) < J(x_0)$ , il existe  $z \in X$  tel que  $z \neq x_0$  et

$$J(z) + d(x_0, z) \leq J(x_0).$$

Alors, il existe  $\bar{x} \in X$  tel que  $J(\bar{x}) = \inf_{x \in X} J(x)$ , c'est-à-dire que  $\bar{x}$  est une solution de problème d'optimisation.

**Démonstration.** Maintenant, nous prouvons théorème II.8 en utilisant théorème II.4. Par théorème II.4, pour tous  $\varepsilon > 0$  et  $\lambda = 1$ , il existe  $\bar{x} \in X$  tel que

$$J(\bar{x}) < J(x) + \varepsilon d(x, \bar{x}), \quad \forall x \in X \text{ avec } x \neq \bar{x}. \quad (\text{II.4})$$

On montre que  $J(\bar{x}) = \inf_{x \in X} J(x)$ .

Supposons au contraire qu'il existe  $\bar{x} \in X$  tel que  $J(\bar{x}) > \inf_{x \in X} J(x)$ .

Par hypothèse de théorème minimization de Takahashi, il existe  $v \in X$  tel que  $v \neq \bar{x}$  et

$$J(v) + d(\bar{x}, v) \leq J(\bar{x}). \quad (\text{II.5})$$

Posons :  $x = v$  dans (II.4), alors on a

$$J(\bar{x}) < J(v) + \varepsilon d(v, \bar{x}), \quad \forall v \in X \text{ avec } v \neq \bar{x}.$$

et

$$J(v) + d(\bar{x}, v) \leq J(\bar{x}), \text{ pour } \varepsilon = 1.$$

On obtient une contradiction. Par conséquent, nous devons avoir  $J(\bar{x}) = \inf_{x \in X} J(x)$ .

■

**Remarque II.4.** *Le théorème de Caristi II.6 et le théorème de minimization de Takahashi II.8 sont équivalents le principe variationnel d'Ekeland II.1, pour plus détail voir ([7], [14]).*



# Existence de solutions pour un problème aux limites de second ordre sur la demi-droite par le principe variationnel d'Ekeland

---

Dans ce chapitre, nous présenterons une application du principe variationnel d'Ekeland pour la résolution d'équations différentielles et nous choisirons comme exemple l'article suivant voir [2]. C'est un bon exemple pour étudier l'existence de solutions à un problème aux limites du second ordre.

## III.1 Introduction

Nous considérons le problème de Dirichlet suivantes :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = \lambda q(x)f(x, u(x)), & x \in [0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Où  $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue et  $\lambda$  est un paramètre positif.

On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées.

( $H_0$ ) il existe des constantes  $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  et  $\theta \in (0, 1)$  tel que

$$|f(x, u)| \leq a|u|^\theta + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall u \in \mathbb{R},$$

( $H_1$ )  $p : [0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$  est continuellement différentiable et borné,

$q : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ , avec  $q \in L^1[0, +\infty) \cap L^\infty[0, +\infty)$ ,  $\frac{q}{p^\theta}, \frac{q}{p^2} \in L^1[0, +\infty)$ ,

$$M_0 = \int_0^{+\infty} q(x) \left( \int_x^{+\infty} \frac{ds}{p(s)} \right) dx < +\infty, \text{ et } M = \max(\|p\|_{L^2}, \|p'\|_{L^2}) < +\infty.$$

$$(H_2) \quad f(x, 0) = 0, \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(x, u)}{u} = +\infty, \text{ uniformément pour } x \in [0, +\infty).$$

Soit l'espace  $H_0^1(0, +\infty)$  est défini par

$$H_0^1(0, +\infty) = \left\{ u \text{ mesurable} : u, u' \in L^2(0, +\infty), u(0) = u(+\infty) = 0 \right\},$$

muni de sa norme naturelle

$$\|u\| = \left( \int_0^{+\infty} u^2(x) dx + \int_0^{+\infty} u'^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

associé au produit scalaire

$$(u, v) = \int_0^{+\infty} u(x)v(x) dx + \int_0^{+\infty} u'(x)v'(x) dx.$$

Soit

$$C_{l,p}[0, +\infty) = \{ u \in C([0, +\infty), \mathbb{R}) : \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x)u(x) \text{ existe} \}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\infty,p} = \sup_{x \in [0, +\infty)} p(x)|u(x)|.$$

On considère l'espace

$$L_q^2(0, +\infty) = \{ u : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable tel que } \sqrt{q}u \in L^2(0, +\infty) \},$$

équipé de la norme

$$\|u\|_{L_q^2} = \left( \int_0^{+\infty} q(x)u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

## III.2 préliminaires

Nous avons besoin des lemmes suivants :

**Lemme III.1.** [11]  $H_0^1(0, +\infty)$  s'injecte de manière continue dans  $C_{l,p}[0, +\infty)$ , i.e.

$$H_0^1(0, +\infty) \hookrightarrow C_{l,p}[0, +\infty).$$

**Démonstration.** Pour  $u \in H_0^1(0, +\infty)$ , nous avons

$$\begin{aligned}
 |p(x)u(x)| &= |p(+\infty)u(+\infty) - p(x)u(x)| = \left| \int_x^{+\infty} (pu)'(s)ds \right| \\
 &\leq \left| \int_x^{+\infty} p'(s)u(s)ds \right| + \left| \int_x^{+\infty} p(s)u'(s)ds \right| \\
 &\leq \left( \int_0^{+\infty} p'^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{+\infty} u^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left( \int_0^{+\infty} p^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^{+\infty} u'^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq 2 \max(\|p'\|_{L^2}, \|p\|_{L^2}) \|u\|.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\|u\|_{\infty, p} \leq 2M \|u\|.$$

■

**Lemme III.2.** [11]  $H_0^1(0, +\infty)$  s'injecte de manière compacte dans  $C_{l,p}[0, +\infty)$ , i.e.

$$H_0^1(0, +\infty) \hookrightarrow C_{l,p}[0, +\infty).$$

Pour prouver que  $H_0^1(0, +\infty)$  s'injecte de manière compacte dans  $C_{l,p}[0, +\infty)$ , nous avons besoin au critère de compacité du Corduneanu suivant (lemme I.1) et lemme III.3 (voir [1] dans chapitre I et lemme 2.3 dans [11]).

**Lemme III.3.** ([11], [12]) Soit  $D \subset C_{l,p}([0, +\infty), \mathbb{R})$  est un ensemble bornée. Alors  $D$  est relativement compact si les conditions suivantes sont satisfaites :

(a)  $D$  est équicontinu sur tout sous-intervalle compact de  $\mathbb{R}^+$ , i.e.

$$\forall J \subset [0, +\infty) \text{ compact}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in J :$$

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |p(x_1)u(x_1) - p(x_2)u(x_2)| \leq \varepsilon, \forall u \in D,$$

(b)  $D$  est équiconvergent à  $+\infty$  i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T = T(\varepsilon) > 0 \text{ tel que}$$

$$\forall x : x \geq T(\varepsilon) \implies |p(x)u(x) - (pu)(+\infty)| \leq \varepsilon, \forall u \in D.$$

### Démonstration.

Il est facile de voir que  $D' = \{v : v(x) = p(x)u(x), u \in D\} \subseteq C_l$  satisfait les conditions de lemme I.1. Ainsi il existe une suite  $\{v_n\} \subset D'$  et  $v_0 \in C_l$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - v_0\|_{C_l} = 0$ . Soit  $u_n(x) = \frac{1}{p(x)}v_n(x)$  pour  $n = 1, 2, \dots$ , et  $u_0(x) = \frac{1}{p(x)}v_0(x)$ . Évidemment,  $\{u_n\} \subset D$ ,  $u_0 \in C_{l,p}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - u_0\|_{C_{l,p}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - v_0\|_{C_l} = 0$ .

■

Maintenant on peut démontrer le lemme III.2.

**Démonstration.** Soit  $D \subset H_0^1(0, +\infty)$  est un ensemble borné. Alors il est borné dans  $C_{l,p}[0, +\infty)$  par lemme III.1. Soit  $R > 0$  telle que pour tout  $u \in D$ ,  $\|u\| \leq R$ . Nous allons appliquer lemme III.3.

(a)  $D$  est équicontinu pour tout sous-intervalle compact de  $[0, +\infty)$ . Soit  $u \in D$  et  $x_1, x_2 \in J \subset [0, +\infty)$  où  $J$  est un sous intervalle compact. On utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned}
 |p(x_1)u(x_1) - p(x_2)u(x_2)| &= \left| \int_{x_2}^{x_1} (pu)'(s)ds \right| \\
 &= \left| \int_{x_2}^{x_1} p'(s)u(s) + u'(s)p(s)ds \right| \\
 &\leq \left( \int_{x_2}^{x_1} p'^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{x_2}^{x_1} u^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \left( \int_{x_2}^{x_1} p^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{x_2}^{x_1} u'^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq 2 \max \left[ \left( \int_{x_2}^{x_1} p'^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}}, \left( \int_{x_2}^{x_1} p^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \|u\| \\
 &\leq 2R \max \left[ \left( \int_{x_2}^{x_1} p'^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}}, \left( \int_{x_2}^{x_1} p^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

comme  $|x_1 - x_2| \rightarrow 0$ .

(b)  $D$  est équi-convergent à  $+\infty$ . Pour  $x \in [0, +\infty)$  et  $u \in D$ , en utilisant le fait que

$(pu)(+\infty) = 0$  (note  $u(\infty) = 0$  et  $p$  est bornée) et utilisant l'inégalité Cauchy-Schwartz.

On a

$$\begin{aligned}
 |(pu)(x) - (pu)(+\infty)| &= \left| \int_x^{+\infty} (pu)'(s) ds \right| \\
 &= \left| \int_x^{+\infty} p'(s)u(s) + u'(s)p(s) ds \right| \\
 &\leq 2 \max \left[ \left( \int_x^{+\infty} p'^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}, \left( \int_x^{+\infty} p^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \|u\| \\
 &\leq 2R \max \left[ \left( \int_x^{+\infty} p'^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}}, \left( \int_x^{+\infty} p^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right] \longrightarrow 0,
 \end{aligned}$$

quand  $x \rightarrow +\infty$ .

■

**Lemme III.4.**  $C_{l,p}[0, +\infty)$  s'injecte de manière continue dans  $L_q^2(0, +\infty)$ .

**Démonstration.** Pour tous  $u \in C_{l,p}[0, +\infty)$  on a

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{L_q^2}^2 &= \int_0^{+\infty} q(x)u^2(x) dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{q(x)}{p^2(x)} p^2(x)u^2(x) dx \\
 &\leq c \|u\|_{\infty,p}^2,
 \end{aligned}$$

où  $c = \|\frac{q}{p^2}\|_{L^1}$ . Alors  $\|u\|_{L_q^2} \leq \sqrt{c} \|u\|_{\infty,p}$ .

■

**Corollaire III.1.**  $H_0^1(0, +\infty)$  s'injecte de manière compacte dans  $L_q^2(0, +\infty)$ .

Nous sommes maintenant intéressés par la première valeur propre  $\lambda_1$  du problème linéaire :

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = \lambda q(x)u(x), & x \geq 0; \\ u(0) = u(+\infty) = 0, \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

à savoir

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1 \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_{L_q^2}^2}.$$

**Lemme III.5.**  $\lambda_1$  est positif et atteint pour une fonction positive  $\varphi_1 \in H_0^1(0, +\infty) \setminus \{0\}$ .

**Démonstration.** Nous procédons comme dans [9]. Pour  $u \in H_0^1(0, +\infty)$ , soit  $I_1(u) = \|u\|^2$ ,  $I_2(u) = \|u\|_{L_q^2}^2$ , et définir la fonctionnelle  $Q : H_0^1(0, +\infty) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$Q(u) = \frac{I_1(u)}{I_2(u)}.$$

Alors

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1 \setminus \{0\}} Q(u).$$

Soit  $u \in H_0^1(0, +\infty)$ . D'après le corollaire III.1, nous avons ça  $\lambda_1 \geq \frac{1}{\|p\|_\infty M_0} > 0$ . En effet, pour  $x > 0$ , note

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= \left| \int_x^{+\infty} u'(s) ds \right|^2 = \left| \int_x^{+\infty} \sqrt{p(s)} u'(s) \frac{1}{\sqrt{p(s)}} ds \right|^2 \\ &\leq \left( \int_x^{+\infty} p(s) u'^2(s) ds \right) \left( \int_x^{+\infty} \frac{ds}{p(s)} \right) \\ &\leq \left( \int_0^{+\infty} p(s) u'^2(s) ds \right) \left( \int_x^{+\infty} \frac{ds}{p(s)} \right), \end{aligned}$$

et donc,

$$q(x) u(x)^2 \leq \left( \int_0^{+\infty} p(s) u'^2(s) ds \right) \left( q(x) \int_x^{+\infty} \frac{ds}{p(s)} \right),$$

qui donne

$$\|u\|_{L_q^2}^2 \leq \|p\|_\infty M_0 \|u\|^2,$$

et

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1 \setminus \{0\}} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_{L_q^2}^2} \geq \frac{1}{\|p\|_\infty M_0} > 0.$$

Soit  $(u_n)$  une suite minimisante. Puisque  $(|u_n|)$  est une suite minimisante pour  $Q$ , on peut supposer que  $u_n(x) \geq 0$ , pour  $x \in [0, +\infty)$ . De plus, la fonctionnelle  $Q$  satisfait  $Q(\alpha u) = Q(u)$ , pour chaque  $\alpha \in \mathbb{R}$ . En mettant  $\widetilde{u}_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{L_q^2}}$ , pour chaque  $n$ , on peut supposer que  $\|u_n\|_{L_q^2} = 1$ . On remarque que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Q(u_n) = \inf_{u \in H_0^1 \setminus \{0\}} Q(u) = \lambda_1, \text{ donc la suite } (Q(u_n)) \text{ est bornée.}$$

A partir de cela et puisque  $Q(u_n) = \|u_n\|^2$ , on en déduit que  $(u_n)$  est borné dans  $H_0^1$ . Alors à partir de lemme III.2 et la réflexivité et la séparabilité de l'espace  $H_0^1$ , il existe une sous-suite  $(u_{n_k})$  de  $(u_n)$  tel que, comme  $k \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{cases} u_{n_k} \rightharpoonup \bar{u}, & \text{dans } H_0^1; \\ u_{n_k} \rightarrow \bar{u}, & \text{dans } C_{l,p}, \end{cases}$$

donc  $u_{n_k}(x) \rightarrow \bar{u}(x)$ , pour tous  $x \in [0, +\infty)$ . D'après lemme III.4,  $(u_{n_k})$  converge en la norme vers  $\bar{u}$  dans  $L_q^2$ . Par conséquent  $\|\bar{u}\|_{L_q^2} = 1$  et  $\bar{u}(x) \geq 0$ , pour  $x \in [0, +\infty)$ . Enfin, la faible semi-continuité inférieure de la norme permet que

$$Q(\bar{u}) = I_1(\bar{u}) \leq \liminf_k I_1(u_{n_k}) = \liminf_k Q(u_{n_k}) = \lambda_1,$$

alors  $\bar{u} \in H_0^1 \setminus \{0\}$  et  $Q(\bar{u}) = \lambda_1$ .

■

### III.3 Le résultat principal

On note  $F$  la primitive de  $f$  en ce qui concerne sa seconde variable, i.e.  $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$ . La fonctionnelle correspondant à (III.1) est

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left( u'^2(x) + u^2(x) \right) dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) F(x, u(x)) dx, \quad u \in H_0^1(0, +\infty).$$

**Proposition III.1.** *Supposons que la condition  $(H_0)$  soit vérifiée. Alors la fonctionnelle  $J$  est continuellement différentiable. Le dérivé de Fréchet de  $J$  admet une forme*

$$\langle J'(u), \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \left( u'(x) \varphi'(x) + u(x) \varphi(x) \right) dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) f(x, u(x)) \varphi(x) dx.$$

**Démonstration.** D'abord, nous montrons que  $J$  est Gâteaux-différentiable. En effet, pour tout  $v \in H_0^1(0, +\infty)$ , et pour tout  $t > 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} J(u + tv) - J(u) &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (|(u + tv)'|^2 + |u + tv|^2) dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) F(x, u + tv) dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (|u'|^2 + |u|^2) dx + \lambda \int_0^{+\infty} q(x) F(x, u) dx \\ &= \frac{t^2}{2} \int_0^{+\infty} |v'|^2 dx + \frac{t^2}{2} \int_0^{+\infty} |v|^2 dx + t \int_0^{+\infty} u' v' dx \\ &\quad + t \int_0^{+\infty} u v dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) [F(x, u + tv) - F(x, u)] dx \\ &= \frac{t^2}{2} \int_0^{+\infty} |v'|^2 dx + \frac{t^2}{2} \int_0^{+\infty} |v|^2 dx + t \int_0^{+\infty} u' v' dx \\ &\quad + t \int_0^{+\infty} u v dx - t \lambda \int_0^{+\infty} q(x) f(x, u + t\theta v) v dx. \end{aligned}$$

Où  $0 < \theta < 1$  (d'après le théorème de la valeur moyenne). On obtient que

$$\begin{aligned} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} &= \frac{t}{2} \int_0^{+\infty} |v'|^2 dx + \frac{t}{2} \int_0^{+\infty} |v|^2 dx + \int_0^{+\infty} u' v' dx \\ &\quad + \int_0^{+\infty} u v dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) f(x, u + t\theta v) v dx. \end{aligned}$$

Soit  $t \rightarrow 0$ . D'après l'hypothèse  $(H_0)$  et le théorème de convergence dominé de Lebesgue garantit que

$$\langle Au, v \rangle = \int_0^{+\infty} (u' v' + uv) dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) f(x, u) v dx, \quad \forall v \in H_0^1(0, +\infty).$$

Facilement de voir que  $Au$  est une forme linéaire et continue. Ensuite, nous montrons que  $A$  est continu. En effet, Soit  $\{u_n\} \subset H_0^1(0, +\infty)$ , où  $u_n \rightarrow u$ , quand  $n \rightarrow +\infty$ . Il en résulte



de  $(H_0)$ , que

$$\begin{aligned} q(x)|f(x, u_n(x))| &\leq aq(x)|u_n|^\theta + bq(x) \\ &\leq a \sup_{x \in [0, +\infty)} |(pu_n)(x)|^\theta \left| \frac{q(x)}{p^\theta(x)} \right| + bq(x) \\ &= a \|u_n\|_{\infty, p}^\theta \left| \frac{q(x)}{p^\theta(x)} \right| + bq(x) \in L^1(0, +\infty). \end{aligned}$$

Ensuite, à partir du théorème de convergence dominé de Lebesgue, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} q(x)f(x, u_n(x))dx = \int_0^{+\infty} q(x)f(x, u(x))dx.$$

Donc, nous avons

$$\begin{aligned} \langle Au_n - Au, v \rangle &= \int_0^{+\infty} (u'_n v' + u_n v) dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x)f(x, u_n) v dx \\ &\quad - \int_0^{+\infty} (u' v' + u v) dx + \lambda \int_0^{+\infty} q(x)f(x, u) v dx \\ &= \int_0^{+\infty} [(u'_n - u') v' + (u_n - u) v] dx \\ &\quad - \lambda \int_0^{+\infty} q(x)(f(x, u_n) - f(x, u)) v dx \end{aligned}$$

passant à la limite en  $\langle Au_n - Au, v \rangle$ , quand  $n \rightarrow +\infty$ , et utilisant l'hypothèse  $(H_0)$  et le théorème de convergence dominé de Lebesgue, on obtient que  $Au_n \rightarrow Au$ , quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Conclusion :  $J$  est de classe  $C^1(H_0^1(0, +\infty), \mathbb{R})$  de plus

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_0^{+\infty} (u' v' + u v) dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x)f(x, u) v dx, \quad \forall v \in H_0^1(0, +\infty).$$

■

**Définition III.1.** On dit que  $u \in H_0^1(0, +\infty)$  est une solution faible du problème (III.1) si pour tout  $\varphi \in H_0^1(0, +\infty)$ , on a

$$\langle J'(u), \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} (u'(x)\varphi'(x) + u(x)\varphi(x)) dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x)f(x, u(x))\varphi(x) dx = 0.$$

**Remarque III.1.** Puisque le terme non linéaire  $f$  est continu, une solution faible du problème (III.1) est une solution classique.

**Théorème III.1.** *Supposons que  $(H_0)$ ,  $(H_1)$  et  $(H_2)$  sont satisfait. Alors le problème (III.1) possède au moins une solution  $u_\lambda$  pour chaque  $\lambda \in \left(0, \frac{1}{\|p\|_\infty M_0}\right)$ .*

**Démonstration.** On utilise la formule  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(x, u)}{u} = 0$  qui résulte de  $(H_0)$ ,  $\exists \delta_1 > 0$  tel que

$$|F(x, u)| \leq \frac{1}{2}u^2, \quad \text{pour tout } |u| > \delta_1;$$

et de  $(H_0)$  que  $\exists M_1 > 0$  tel que

$$|F(x, u)| \leq M_1, \quad \text{pour tout } u \in [-\delta_1, \delta_1], \quad \text{et pour tout } x \in (0, +\infty).$$

Par conséquent, nous en déduisons

$$|F(x, u)| \leq M_1 + \frac{1}{2}u^2, \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R}, \quad \text{et pour tout } x \in [0, +\infty). \quad (\text{III.3})$$

Maintenant, on utilise (III.3) en même temps avec  $(H_1)$ , donc, il donne (noter aussi l'injection continue de  $H_0^1(0, +\infty)$  dans  $L_q^2(0, +\infty)$ ) (i.e.,  $\|u\|_{L_q^2}^2 \leq \|p\|_\infty M_0 \|u\|^2$  pour  $u \in H_0^1(0, +\infty)$  voir lemme III.5)

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) F(x, u(x)) dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) \left( M_1 + \frac{1}{2}u^2(x) \right) dx \\ &= \frac{1}{2}\|u\|^2 - \lambda M_1 \int_0^{+\infty} q(x) dx - \frac{\lambda}{2} \|u\|_{L_q^2}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} (1 - \lambda \|p\|_\infty M_0) \|u\|^2 - \lambda M_1 \|q\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe  $\rho > \left( \frac{2\lambda M_1 \|q\|_{L^1}}{1 - \lambda \|p\|_\infty M_0} \right)^{\frac{1}{2}} > 0$  avec

$$J(u) > 0, \quad \text{si } \|u\| = \rho, \quad \text{et puis } \inf_{u \in \partial \overline{B_\rho(0)}} J(u) > 0,$$

et  $J(u) \geq -C_2$ , si  $\|u\| \leq \rho$ , où  $C_2 = \lambda M_1 \|q\|_{L^1}$ . Puis la fonctionnelle  $J$  est borné inférieurement sur  $\overline{B_\rho(0)}$ .

Soit  $\varphi_1 \in H_0^1$  défini comme dans lemme III.5. On situe  $\lambda$  dans  $(0, \frac{1}{\|p\|_\infty M_0})$ , et on prend  $M_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda}$ . Alors d'après  $(H_2)$ , il existe  $\delta_2 > 0$  tel que

$$F(x, u) \geq M_2 |u|^2, \quad \text{pour tout } -\delta_2 < u < \delta_2. \quad (\text{III.4})$$

La fonction  $\varphi_1$  est continue sur  $[0, +\infty)$  (on remarque que  $\varphi_1 \in H_0^1(0, +\infty)$ ) et  $\varphi_1(0) = \varphi_1(+\infty) = 0$ , alors  $\sup_{x \in [0, +\infty)} \varphi_1(x) \leq c^*$  pour certains  $c^* > 0$ . Par conséquent, pour chaque  $0 < t < \frac{\delta_2}{c^*}$ , et (III.4), on a

$$\begin{aligned} J(t\varphi_1) &= \frac{t^2}{2} \|\varphi_1\|^2 - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) F(x, t\varphi_1^2(x)) dx \\ &\leq \frac{t^2}{2} \|\varphi_1\|^2 - \lambda M_2 t^2 \int_0^{+\infty} q(x) \varphi_1^2(x) dx \\ &= \frac{t^2}{2} \|\varphi_1\|^2 - \frac{\lambda M_2 t^2}{\lambda_1} \|\varphi_1\|^2 \\ &= \frac{t^2}{2} \|\varphi_1\|^2 - t^2 \|\varphi_1\|^2 = -\frac{t^2}{2} \|\varphi_1\|^2 < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque  $t \rightarrow 0$ , nous avons  $J(t\varphi_1) < 0$ . Puis on en déduit

$$\inf_{u \in B_\rho(0)} J(u) < 0 < \inf_{u \in \partial B_\rho(0)} J(u). \quad (\text{III.5})$$

En appliquant le principe variation d'Ekeland (théorème II.5) dans l'espace métrique complet  $\overline{B_\rho(0)}$ , il y a une suite  $(u_n) \subset \overline{B_\rho(0)}$  tel que

$$J(u_n) \leq \inf_{u \in \overline{B_\rho(0)}} J(u) + \frac{1}{n}, \quad J(u_n) \leq J(w) + \frac{1}{n} \|w - u_n\|, \quad \forall w \in \overline{B_\rho(0)}.$$

D'après (III.5),  $u_n \notin \partial \overline{B_\rho(0)}$ . Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$   $u_n \in B_\rho(0)$  et si on met,  $w = u_n + th$ , pour tout  $t > 0$ ,  $h \in H_0^1(0, +\infty)$ , et  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , alors  $w = u_n + th$  appartient à la boule ouverte  $B_\rho(0)$  quand  $t \rightarrow 0$ , et alors  $J(u_n) \leq J(u_n + th) + \frac{1}{n} t \|h\|$ , alors

$$\frac{J(u_n) - J(u_n + th)}{t} < \frac{1}{n} \|h\|,$$

et nous avons

$$-\langle J'(u_n), h \rangle \leq \frac{1}{n} \|h\|, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

si on met  $w = u_n - th$ , alors nous avons obtenu  $\langle J'(u_n), h \rangle \leq \frac{1}{n} \|h\|$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Par conséquent

$$\sup_{\|h\| \leq 1} |\langle J'(u_n), h \rangle| \leq \frac{1}{n}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Pour cette raison, nous avons

$$\|J'(u_n)\| \rightarrow 0, \text{ et } J(u_n) \rightarrow c_\lambda \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

où  $c_\lambda$  représente l'infimum de  $J(u)$  sur  $\overline{B_\rho(0)}$ . Puisque  $(u_n)$  est borné et  $\overline{B_\rho(0)}$  est un ensemble convexe fermé, il existe  $u_\lambda \in \overline{B_\rho(0)} \subset H_0^1(0, +\infty)$  tel que

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u_\lambda, \text{ faiblement dans } H_0^1(0, +\infty); \\ u_n \rightarrow u_\lambda, \text{ fortement dans } C_{l,p}[0, +\infty); \\ u_n(x) \rightarrow u_\lambda(x), \text{ pour p.p. dans } (0, +\infty). \end{cases}$$

Par conséquent, si nous passons à la limite en  $\langle J'(u_n), \varphi \rangle$ , lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , nous utilisons le théorème de convergence dominé de Lebesgue qui donne

$$\int_0^{+\infty} \left( u'_\lambda(x) \varphi'(x) + u_\lambda(x) \varphi(x) \right) dx - \lambda \int_0^{+\infty} q(x) f(x, u_\lambda(x)) \varphi(x) dx = 0,$$

pour tout  $\varphi \in H_0^1(0, +\infty)$ , c'est-à-dire,  $\langle J'(u_\lambda), \varphi \rangle = 0$  pour tout  $\varphi \in H_0^1(0, +\infty)$ . Ainsi  $u_\lambda$  est un point critique de  $J$ , qui est une solution classique de notre problème. ■

**Exemple III.1.** Soit  $f(x, u) = u^{\frac{1}{5}}$ ,  $q(x) = e^{-kx}$ ,  $p(x) = e^{-\frac{1}{3}kx}$ , où  $k > 0$  une constante. Ensuite, nous obtenons

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall u \in \mathbb{R}^+ : |f(x, u)| = |u^{\frac{1}{5}}| \leq |u^\theta| + 1, \quad \text{où } \theta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

et aussi, on a

$$\left(\frac{q}{p^{\frac{1}{2}}}\right)(x) = e^{-\frac{5}{6}kx}, \quad \left(\frac{q}{p^2}\right)(x) = e^{-\frac{1}{3}kx} \in L^1, \text{ et } q \in L^1[0, +\infty) \cap L^\infty[0, +\infty).$$

Remarquons que les conditions  $(H_0)$ ,  $(H_1)$  et  $(H_2)$  sont satisfait. Donc le théorème [III.1](#) peut maintenant être appliqué.

---

# Conclusion

---

Dans ce travail, on a étudié le principe variationnel d'Ekeland et quelques théories et on étudié un problème aux limites d'ordre deux posés sur l'intervalle non borné  $[0, +\infty)$  par des méthodes variationnelles, ainsi que le principe variationnel d'Ekeland (EVP).

Dans le premier chapitre, on a donné quelques outils de base, qui sont nécessaires pour ce travail, comme la théorie des points critiques, la différentiabilité d'un opérateur dans l'espace de Banach et un lemme de compacité (C. Corduneanu).

Dans le deuxième chapitre, notre objectif était de montrer le principe variationnel d'Ekeland (version forte) et quelques corollaires dérivées. Aussi nous avons déterminé l'implication de EVP à des théorèmes du point fixe de Banach et de Caristi et de théorème de minimisation de Takahashi.

En fin, on a étudié l'existence de solutions pour les problèmes aux limites,

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = \lambda q(x)f(x, u(x)), & x \in [0, +\infty), \\ u(0) = u(+\infty) = 0. \end{cases}$$

Notre approche est variationnelle, nous avons utilisé le principe variationnel d'Ekeland et les solutions sont obtenues comme des minimums ou des points critiques d'une certaine fonctionnelle.

Nous prévoyons dans le futur d'essayer d'améliorer certains résultats de ce problème.

---

# Bibliographie

---

- [1] C. CORDUNEANU. *Integral Equations and Stability of Feedback Systems*. Academic Press, New York. **(1973)**.
- [2] D. BOUAFIA, T. MOUSSAOUI, AND D. O'REGAN. *Existence of Solutions for a Second Order Problem on The Half-Line Via Ekeland's Variational Principle*. Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim. **36 (2016)**, 131-140.
- [3] D. CAROLINE. *Théorèmes de Point Fixe et Principe Variationnel D'Ekeland*. Mémoire. Université de Montréal **(2010)**.
- [4] J. BAPTISTE AND H. URRUTY. *Bases, Outils et Principes pour L'Analyse Variationnelle*. Springer. **(1966)**.
- [5] J. M. BORWEIN AND Q. J. ZHU. *Techniques of Variational Analysis*. Springer. **(2005)**.
- [6] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, Paris **(1983)**.
- [7] H. K. PATHAK. *An Introduction to Nonlinear Analysis and Fixed Point Theory*. Springer **(2018)**.
- [8] I. EKELAND. *On the variational principle*. J. Math. Anal. Appl. **47(1974)**, 324-353 .
- [9] M. BADIALE, E. SERRA. *Semilinear Elliptic Equations for Beginners Existence Results via the Variational Approach*. Springer-Verlag London Limited (2011).
- [10] M. D. R. GROSSINHO AND S. A. TERSIAN. *An Introduction to Minimax Theorems and Their Applications to Differential Equations*. Springer Science. **(2001)**.
- [11] O. FRITES, T. MOUSSAOUI, D. O'REGAN, *Existence of solutions via variational methods for a problem with nonlinear boundary conditions on the half-line*, Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. **22 (2015)**, pp. 395-407.
- [12] O. FRITTES, T. MOUSSAOUI, AND D. O'REGAN. *On The Structure of The Critical Set of Non-Differentiable Functions with a Weak Compactness Condition*. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. **22 (2015)**, 395-407

- [13] P. H. RABINOWITZ. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. CBMS regional conference series in mathematics, vol. 65, American mathematical society, providence, RI **(1986)**.
- [14] P. V. SUBRAHMANYAM. *Elementary Fixed Point Theorems*. Springer **(2018)**.
- [15] S. FORMINE ET A. KOLMOGOROV. *Élément de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Traduction français, Édition Mir. Moscou **(1977)**.
- [16] V. TRENOGUINE. *Analyse fonctionnelle*. Traduction française, Édition, Mir. Moscou **(1985)**.
- [17] Y. JABRI. *The Mountan Pass Theorem Variants, Generalizations and Some Applications*. Cambridge University Press, New York. **(2003)**.